Lineær differentialligning af første orden

af John V. Petersen

Sætning :

Funktionerne $g(x)$ og $h(x)$ er kendte funktioner,
som er kontinuerte på et interval] a , b [.

$y = f(x)$ er differentiabel på] a , b [

Den fuldstændige løsning til differentialligningen

$y' + g(x)\cdot y = h(x)$ eller $f'(x) + g(x)\cdot f(x) = h(x)$ (1)

er $y = e^{-G(x)}\cdot \int e^{G(x)}\cdot h(x)\,dx\,.$ (2) for alle x på $]\, a\, ,\, b\, [$

Bevis :

Beviset falder i to dele:

I. Hvis f er en løsning, så er f af formen (2).

II. Hvis f er af formen (2), så er der kun én løsning f i hvert punkt (x , y) i] a , b [,
og der eksisterer en løsning i hvert punkt.
(Entydighed og eksistens af løsninger.)

I.
Antag, at y er en løsning til ligningen $y' + g(x)\cdot y = h(x)$. Vi skal nu finde ud af, hvordan y ser ud.
Metoden kaldes: Den analytiske metode.

Da g(x) er kontinuert har den en stamfunktion G(x).
Vi multiplicerer nu (1) med faktoren $e^{G(x)}$ og ser på ligningen.

$$e^{G(x)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x)\right) + e^{G(x)}\, g(x)\, y(x) = e^{G(x)}\, h(x) \qquad (3)$$

Hvis vi ser lidt på venstresiden af ligningen ses det, at det ligner den afledede af et produkt:
$(f\cdot g)' = f\cdot g' + f'\cdot g$.

I vores tilfælde (3) er den første funktion en sammensat funktion: $e^{G(x)}$
Og $(e^{G(x)})' = e^{G(x)} \cdot G'(x) = e^{G(x)} \cdot g(x)$.

$\left(e^{G(x)} \cdot y\right)' = e^{G(x)} \cdot y' + e^{G(x)} \cdot g(x) \cdot y = e^{G(x)} \cdot h(x)$ *dvs.* $\left(e^{G(x)} \cdot y\right)' = e^{G(x)} \cdot h(x)$

Så ved vi, fra integrationsprøven, at $e^{G(x)} \cdot y$ er en stamfunktion til $e^{G(x)} \cdot h(x)$. [$F'(x) = f(x)$]

dvs. $e^{G(x)} \cdot y = \int e^{G(x)} \cdot h(x)\, dx$.

Vi multiplicerer med $e^{-G(x)}$ på begge sider af ligningen, og får:

$y = e^{-G(x)} \cdot \int e^{G(x)} \cdot h(x)\, dx$. (2)

Dermed er **I.** bevist.

II.

Vi viser først **entydigheden** af en løsning gennem et punkt $(x_0, y_0) = (c, d)$, $y(c) = d$.

Vi vil vise, at grafen for to forskellige løsninger y_1 *og* y_2 *ikke kan gå gennem samme punkt.*

$y_1(x) = e^{-G(x)} \cdot \left(\int e^{G(x)} \cdot h(x)dx + C_1\right)$ *og*

$y_2(x) = e^{-G(x)} \cdot \left(\int e^{G(x)} \cdot h(x)dx + C_2\right)$, C_1 *og* C_2 *er* **to** *forskellige konstanter.*

Vi trækker y_2 *fra* y_1, *og får*

$y_1(x) - y_2(x) = e\left(C_1 - C_2\right)^{-G(x)}$

Vælger vi $x = c$, *ser vi at*

$y_1(c) - y_2(c) = e^{-G(c)}\left(C_1 - C_2\right) \neq 0$, da $C_1 \neq C_2$

dvs. løsningsgraferne for y_1 *og* y_2 *kan ikke gå gennem samme punkt.*

Det viser, at der højst kan være én løsningsgraf så $y(c) = d$

Så vil vi vise **eksistensen** af en løsning gennem hvert punkt $(x_0, y_0) = (c, d)$, $y(c) = d$.

dvs. vi skal vise, at $y(x) = e^{-G(x)} \cdot \left(\int e^{G(x)} \cdot h(x) dx + C \right)$ *er en løsning*

til (1) i y(c) = d. Og y(x) er virkelig en løsning til (1).

Ved indsættelse af løsningen

$$y(x) = e^{-G(x)} \cdot \left(\int e^{G(x)} \cdot h(x) dx \; + C \right) \qquad i\ (\ 1\ )$$

vha.Maple, ses det, at løsningen stemmer ved indsættelse

$odel := \frac{d}{dt} y(t) + g(t)\, y(t) = h(t)$

$$odel := \frac{d}{dt} y(t) + g(t)\, y(t) = h(t) \tag{2.1}$$

$loesning := dsolve(odel)$

$$loesning := y(t) = \left(\int h(t)\, e^{\int g(t)\, dt}\, dt + \_C1 \right) e^{\int (-g(t))\, dt} \tag{2.2}$$

$subs(loesning, odel)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\int h(t)\, e^{\int g(t)\, dt}\, dt + \_C1 \right) e^{\int (-g(t))\, dt} \right) + g(t) \left(\int h(t)\, e^{\int g(t)\, dt}\, dt + \_C1 \right) e^{\int (-g(t))\, dt} = h(t) \tag{2.3}$$

$simplify(\%)$

$$h(t) = h(t) \tag{2.4}$$

Sætningen fortæller os, at to løsningsgrafer aldrig skærer hinanden:

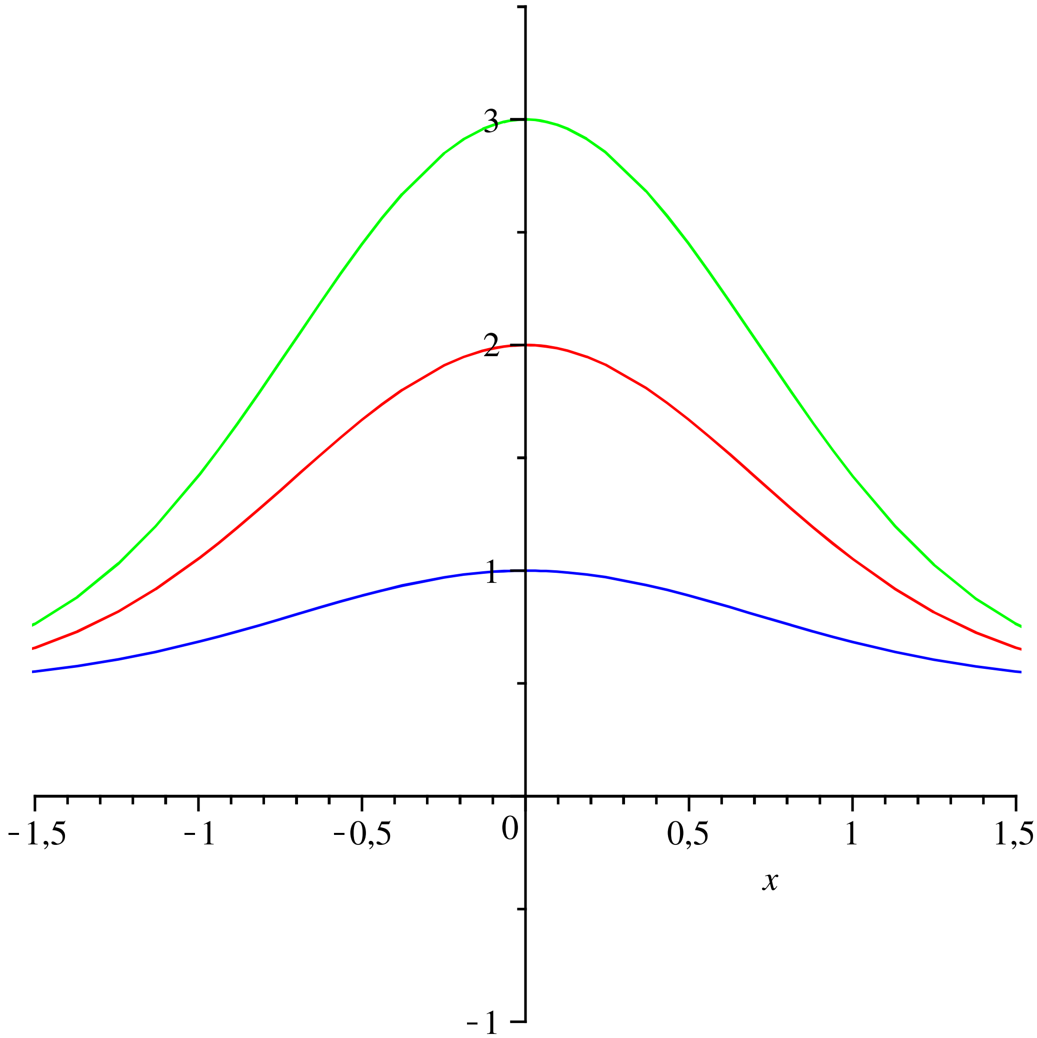
På næste side er nogle løsningsgrafer som viser dette.

Nogle løsningsgrafer for differentialligningen

$$\frac{d}{dx}\, y(x) + 2\, x\, y(x) = x$$

$with(\, plots\,)$

$plot(\, [\, f(x),\, g(x),\, h(x)\,],\, x = -3\,..3,\, view = [\, -1.5\,..1.5,\ -1\,..3.5\,],\, color = [\, blue,\, red,\, green\,]\,)$



På næste side er en anden måde at påvise **eksistensen** af en løsning gennem hvert punkt

Her er en anden måde at påvise **eksistensen** af en løsning
gennem hvert punkt $(x_0 , y_0) = (c , d)$, $y(c) = d$.

Vi skal her minde om differential − og integralregningens hovedsætning

Hvis f er kontinuert på [a,b] , så er f integrabel på ethvert interval [a , x],   x ∈ [a , b]   og $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ *er en stamfunktion til* f *på* $[a , b]$.

Så kan løsningen skrives sådan

$$y(x) = e^{-G(x)} \cdot \int e^{G(x)} \cdot h(x)dx \;\; =$$

$$y(x) \;=\; e^{-\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t} \cdot \left(\int_c^x e^{\int_c^t f(s)\,\mathrm{d}s} \cdot\; h(t)dt \;+\; C \right)$$

$$\mathrm{y(c) = d} \;\;\Rightarrow\;\; y(c) \;=\; e^{-\int_c^c f(t)\,\mathrm{d}t} \cdot \left(\int_c^c e^{\int_c^t f(s)\,\mathrm{d}s} \cdot\; h(t)dt \;+\; d \right) = \mathrm{e}^0\,(0 \;+ d) \;=\; d.$$

Der eksisterer en løsning så y(c) = d.

Så skal vi vise, at y(x) virkelig er en løsning til (1):

Det er løsningen y(x) på formen

$$y(x) \;=\; e^{-\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t} \cdot \left(\int_c^x e^{\int_c^t f(s)\,\mathrm{d}s} \cdot\; h(t)dt \;+\; C \right)$$

vi ser på.

$G(x) = \int_c^x g(t)\, \mathrm{d}t$ *er en stamfunktion til* $g(x)$.

Så y(x) kan skrives

$$y(x) = e^{-G(x)} \cdot \left(\int_c^x e^{G(t)} \cdot h(t) dt \ + d \right)$$

Og $\int_c^x e^{G(t)} \cdot h(t) dt$, *er en stamfunktion til* $h(x) \mathrm{e}^{G(x)}$.

Så y(x) kan nu skrives

$$y(x) = e^{-G(x)} \cdot \left(\int e^{G(x)} \cdot h(x) dx \ + C \right)$$

og vi genkender den som en løsning til (1).

$\square$