Biologisk model

af John V. Petersen

To arter lever i det samme økosystem: Vaskebjørne og egern.

Vi ser på vækstraterne af de to populationer, interaktionerne mellem de to populationer og finder en model der giver en prognose for udviklingen i tid for populationerne.

For at gøre det, må vi opstille et differentialligningssystem: 2 koblede differentialligninger af 1. orden

Det er rimeligt at antage, at vækstraten for hver art afhænger af størrelsen af begge populationer. (Selvfølgelig er der andre faktorer som påvirker væksten. Men vi vil gøre vores model simpel, ved at se bort fra disse.)

Hvis $x_1(t)$ og $x_2(t)$ betegner størrelsen af de to populationer til tiden t, så vil $x'_1(t)$ og $x'_2(t)$ være deres vækstrate til tiden t.

Vores model får følgend udseende:

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a\cdot x_1(t) + b\cdot x_2(t) \\ x'_2(t) &= c\cdot x_1(t) + d\cdot x_2(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

hvor koefficienterne a, b, c og d afhænger af forholdene for de to arter i økosystemet.

Systemet (1) på matrix form:

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \text{eller} \quad \mathbf{x'} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

Vaskebjørne og egern bebor det samme økosystem og konkurrerer om mad, vand og plads. Lad vaskebjørne og egern populationerne, til tiden t, være givet ved $r(t)$ henholdsvis $s(t)$. Ved fravær af egern, vil vaskebjørnenes vækst være $r'(t) = 2.5\cdot r(t)$. Men når der er egern tilstede i økosystemet, vil den indbyrdes konkurrence bremse væksten af vaskebjørne til $r'(t) = 2.5\cdot r(t) - s(t)$. På samme måde vil væksten af egern være $s'(t) = 2.5\cdot s(t)$, ved fravær af vaskebjørne. Når der er vaskebjørne tilstede i økosystemet, vil den indbyrdes konkurrence her bremse væksten af egern til $s'(t) = -2.5\cdot r(t) + 2.5\cdot s(t)$.

Antag nu, at der til tiden $t = 0$, er 60 vaskebjørne og 60 egern i økosystemet. Og bestem hvad der sker med disse to populationer.

Vores system er :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\,\mathbf{x}\ , \quad \begin{bmatrix} r'(t) \\ s'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1.0 \\ -0.25 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'(t) = \begin{bmatrix} r'(t) \\ s'(t) \end{bmatrix}\ , \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1.0 \\ -0.25 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Vi kan nu bruge sætning 1, side 5, i artikel **a.** ovenfor.
Vi opskriver sætningen for en 2 x 2 matrix:

Sætning 1:

A er en diagonaliserbar 2 x 2 matrice, og $\mathbf{P} = [\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2]$

$$\textit{Der gælder , at} \quad \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

hvor λ_1, λ_2 er egenværdierne for $\boldsymbol{A}$, *og* $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ de tilhørende egenvektorer.

Så er den generelle løsning til differentialligningssystemet $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$

$$\mathbf{x} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}\, \boldsymbol{v}_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}\, \boldsymbol{v}_2$$

For at løse problemet og finde $\boldsymbol{x}(t)$, henholdsvis $r(t)$ *og* $s(t)$, skal vi først finde egenværdierne for matricen **A**, λ_1 *og* λ_2 samt de tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{v}_1$ og $\boldsymbol{v}_2$ **.**

Vi vil finde egenværdier λ_1, λ_2 for **A :**

Det karakteristiske polynomium **for** *A er*

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2.5 - \lambda & -1.0 \\ -0.25 & 2.5 - \lambda \end{vmatrix} = (2.5 - \lambda)^2 - (-0.25) \cdot (-1.0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 5.0 \cdot \lambda + 6.0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 3 \quad og \quad \lambda_2 = 2\ .$$

Nu vil vi finde egenvektorerne $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ hørende til egenværdierne λ_1, λ_2 .

Det gør vi ved at finde nulrummet for matricen $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$ **,** dvs. løse $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ **.**

For $\lambda_1 = 3$: Vi finder nulrummet for $\boldsymbol{A} - 3\,\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.0 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix}$

Ved række reduktion : $\left[\,\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{0}\,\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -0.5 & -1.0 & 0 \\ -0.25 & -0.5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$

$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.5 & 0 \end{array}\right]$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ er løsning.

Så egenrummet $E_4 = span\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Vi vælger $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tilsvarende finder vi $\boldsymbol{v}_2$ *hørende til* $\lambda_2 = 2$: $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vha. Sætning 1, får vi den generelle løsning til systemet:

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1\cdot e^{3\cdot t}\,\boldsymbol{v_1} + C_2\cdot e^{2\cdot t}\,\boldsymbol{v_2} = C_1\cdot e^{3\cdot t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\cdot e^{2\cdot t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Begyndelses populetions vektoren er $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} r(0) \\ s(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}$.

Så hvis vi sætter $t = 0$ i (2), har vi

$C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}$, hvilket giver $C_1 = 15$ *og* $C_2 = 45$.

$$\boldsymbol{x}(t) = 15\cdot e^{3\cdot t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 45\cdot e^{2\cdot t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$ heraf ses det, at

$r(t) = -30\cdot e^{3\cdot t} + 90\cdot e^{2\cdot t}$ *og* $s(t) = 15\cdot e^{3\cdot t} + 45\cdot e^{2\cdot t}$

Nedenfor ses graferne for disse to funktioner. Det ses tydeligt, at vaskebjørne populationen uddør lidt efter 1 år.
Helt nøjagtigt uddør populationen efter: 1.0986 år.

$(-30\cdot e^{3\cdot t} + 90\cdot e^{2\cdot t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.098612289\,)$

(1)