Beregning af bestemt integrale ved partiel integration:

af John V. Petersen

Opgave: Beregn den eksakte værdi af $\int_1^2 (x+1)\cdot\ln(x)\ \mathrm{d}x$

Vi har et produkt af to funktioner: $(x+1)\cdot\ln(x)$

Lad $f(x) = (x+1)$ og $g(x) = \ln(x)$

$F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

Lad os tage udgangspunkt i produktet $F(x)\cdot g(x)$

$$(F(x)\cdot g(x))' = F'(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$$

$$= f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$$

dvs. $F(x)\cdot g(x)$ er en stamfunktion til $f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$

da $(F(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$

Vi omytter højre og venstre side af ligningen:

$$f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x) = (F(x)\cdot g(x))'$$

og integrerer på begge sider med grænserne a og b.

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x))\ \mathrm{d}x = [F(x)\cdot g(x)]_a^b \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\ \mathrm{d}x + \int_a^b (F(x)\cdot g'(x))\ \mathrm{d}x = [F(x)\cdot g(x)]_a^b \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\ \mathrm{d}x = [F(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b (F(x)\cdot g'(x))\ dx$$

Vi har nu følgende sætning:

Partiel integration af bestemt integrale:

Lad f være en kontinuert funktion, der har F som stamfunktion, og lad g være en differentiabel funktion. Da er

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))\ \mathrm{d}x = [F(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b (F(x)\cdot g'(x))\ dx$$

Vi skal nu bruge sætningen:

$$\int_a^b (f(x) \cdot g(x)) \, \mathrm{dx} = [F(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b (F(x) \cdot g'(x)) \, dx \quad (*)$$

til at løse opgaven: $\int_1^2 (x+1) \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x$

Vi vælger så den funktion der er nemmest at integrere:

dvs. $f(x) = (x+1) \quad og \qquad F(x) = \frac{1}{2} x^2 + x$

$g(x) = \ln(x)$ *er jo nem at differentiere* : $g'(x) = \frac{1}{x}$

Vi indsætter nu i $(*)$:

$$\int_1^2 (x+1) \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x = \left[\left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \cdot \ln(x) \right]_1^2 - \int_a^b \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \cdot \ln(x) \right]_1^2 - \int_a^b \left(\frac{1}{2} \cdot x + 1 \right) dx$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \cdot \ln(x) \right]_1^2 - \left[\frac{1}{4} x^2 + x \right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \cdot \ln(x) - \left(\frac{1}{4} x^2 + x \right) \right]_1^2$$

$$= 4 \cdot \ln(2) - 3 - \left(\frac{3}{2} \cdot \ln(1) - \frac{5}{4} \right)$$

$$= 4 \cdot \ln(2) - 3 + \frac{5}{4} = 4 \cdot \ln(2) - \frac{7}{4}$$

$\boldsymbol{\int_1^2 (x+1) \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x = 4 \cdot \ln(2) - \frac{7}{4}}$ **, er den eksakte løsning.**

som tilnærmet er: ≈ 1.02259

Vi gør prøve. Den fundne stamfunktion er :

$$H(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cdot \ln(x) - \left(\frac{1}{4}x^2 + x\right)$$

$$H'(x) = \left(\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cdot \ln(x) - \left(\frac{1}{4}x^2 + x\right)\right)' =$$

$$(x+1)\cdot \ln(x) + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\cdot \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) =$$

$(x+1)\cdot \ln(x)$ ***OK***

Her er et plot af løsningen:

> $f := x \rightarrow (x+1)\cdot \ln(x);$

$$f := x \rightarrow (x+1)\ \ln(x) \qquad \textbf{(1)}$$

> $with(plots):$
> $A := plot(f(x), x = 0..2.5, view = [0..2.5, -5..3], color = blue):$
> $B := plot(f(x), x = 1..2, view = [0..2.5, -5..3], filled = true):$
> $display(A, B);$