Beregning af bestemt integrale ved substitution:

af John V. Petersen

Denne opgave løses på en måde, så metoden "integration ved substitution" samtidig indføres og forklares

NB: På side 3, vises løsning af opgaven kort og direkte!, og på side 4 et plot!

Opgave: Beregn den eksakte værdi af $\int_0^1 (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx$

Det er ikke lige til at finde en stamfunktion til funktionen $(x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}$

Derfor vil vi her benytte integration ved substitution. Når man skal finde stamfunktioner til sammensatte funktioner, kan det nogle gange gøres ved denne metode.

Vi ser først på det ubestemte integrale: $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx$

Vi sætter $x^2+2\cdot x+1 = g(x)$.

$g(x)$ *er den* "indre funktion" *i den sammensatte funktion* $f(g(x)) = e^{x^2+2\cdot x+1}$

$$g(x) = x^2+2\cdot x+1 \Rightarrow g'(x) = 2\cdot x+2 = 2\cdot(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot g'(x) = (x+1)$$

Og $f(t) = f(g(x)) = e^{x^2+2\cdot x+1}$, $t = g(x)$

Nu har vi: $\int (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx =$

$$\int e^{x^2+2\cdot x+1}\cdot(x+1)\,dx = \int f(g(x))\cdot\frac{1}{2}\cdot g'(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$

dvs. $$\int (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$

Bemærk, at $f(g(x))$ *bliver multipliceret med den afledede af den indre funktion* $g(x)$:
Det er bl.a. den sammenhæng man skal lægge mærke til ved et integrale,
hvis man vil bruge substitution.

Nu vil jeg opskrive sætningen om integration ved substitution, og derefter få det hele til at se mere meningsfuldt ud:

Se næste side

Sætning 1: Integration ved substitution

Lad f være en kontinuert funktion, der har F som stamfunktion, og lad g være en differentiabel funktion. Da er

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t)+c = F(g(x))+c \quad , \textit{ hvor } t=g(x)$$

t indføres som ny integrationsvariabel på en enkel og fornuftig måde. Se udregningerne nedenfor:

Vi substituerer med værdierne til højre:

$$\int (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx =$$

$$\int e^{x^2+2\cdot x+1}\cdot(x+1)\,dx =$$

$$\int e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int e^t\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\cdot e^t + c = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}+c$$

Ovenfor så vi, at $t=g(x)=x^2+2\cdot x+1 \quad \Rightarrow$

$$\frac{dt}{dx}=g'(x)=2\cdot x+2 = 2\cdot(x+1) \quad \Rightarrow$$

$$dt = 2\cdot(x+1)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$(x+1)\,dx = \frac{1}{2}\,dt$$

$<--$ *(vi substituerer tilbage med* $g(x)$*)*

Nu har vi samlet, at $\displaystyle\int (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}+c$

Vi gør prøve. Hvis $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$: $F'(x)=f(x)$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}+c\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x^2+2\cdot x+1}\right)\cdot(2\cdot x+2) = (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1} \quad \textbf{\textit{OK}}$$

$$\int_0^1 (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(e^4 - e^1\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^4 - e\right)$$

Så den eksakte værdi af integralet $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\cdot e^{x^2+2\cdot x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(e^4 - e\right)$

En tilnærmet værdi er: $\frac{1}{2}\cdot\left(e^4 - e\right) \approx 25.9399$, dvs. ca. 26

Nu vil jeg indføre sætningen om integration ved substitution for bestemte integraler.
Se næste side:

Nu vil jeg så udføre integrationen kort og enkelt.

Pga. alt forarbejdet skulle det gerne være noget nemmere at forstå, end hvis jeg blot var startet med at gøre nedenstående:

> Sætning 2: Integration ved substitution, for bestemte integraler:
>
> Lad f være en kontinuert funktion, der har F som stamfunktion, og lad g være en differentiabel funktion. Da er
>
> $$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = [F(g(x))]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$
>
> $$hvor\ \ t = g(x)$$

Vi indsætter nu blot i Sætning 2:

$$\int_0^1 (x+1)\cdot \mathrm{e}^{x^2+2\cdot x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int_1^4 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2}\cdot[\,\mathrm{e}^t\,]_1^4 =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^4 - e\right)$$

Fra tidligere ved vi, at

$$t = g(x) = x^2 + 2\cdot x + 1$$

og dermed:

$$(x+1)\ dx = \frac{1}{2}\ dt$$

Desuden får vi nemt de nye grænser $g(a)$ *og* $g(b)$:

$$x = 0 \quad\Rightarrow\quad g(0) = 0^2 + 2\cdot 0 + 1 = 1$$

$$x = 1 \quad\Rightarrow\quad g(1) = 1^2 + 2\cdot 1 + 1 = 4$$

$$\int_0^1 (x+1)\cdot \mathrm{e}^{x^2+2\cdot x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^4 - e\right)$$

På næste side plottes funktionen og det fundne areal er vist!

> $f := x \rightarrow (x+1) \cdot e^{x^2+2 \cdot x+1};$

$$f := x \rightarrow (x+1)\, e^{x^2+2x+1} \tag{1}$$

> $with(plots) :$

> $A := plot(f(x), x = -1 .. 1.11, view = [-1 .. 2, 0 .. 200], color = blue) :$

> $B := plot(f(x), x = 0 .. 1, view = [-1 .. 2, 0 .. 200], filled = true) :$

> $display(A, B);$