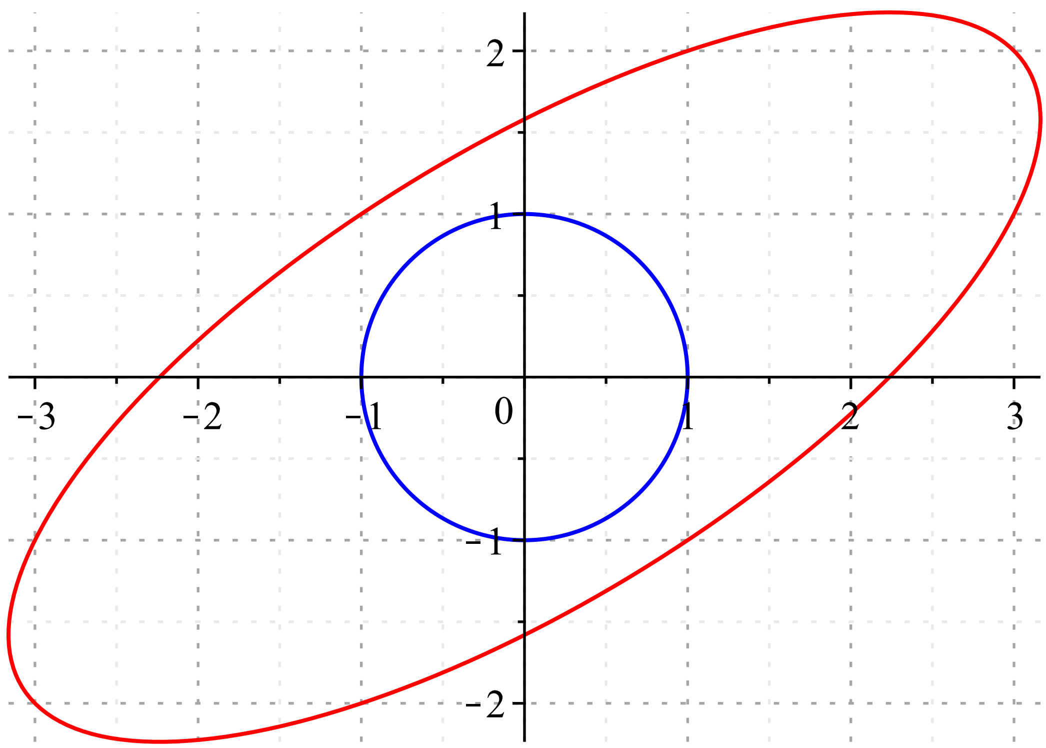
Lineær afbildning - Cirkel afbildes på Ellipse



Lineær afbildning med matricen A som virker på enhedscirklen og afbilder en ellipse

Vi ser på en lineær afbildning med matrice A , som virker på enhedscirklen
og afbilder den som en ellipse.

Vi vil anvende Maple til at udregne og plotte.

Du kan se nærmere om udregning af egenværdier og egenvektorer mv. i artiklen:
eksempel på biologisk sytem - under artiklerne om Lineær algebra, egenværdier, egenvektorer mv

Vi starter med at se på matricen A og finde egenværdier og egenvektorer.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$with(LinearAlgebra):$
$with(plots):$

 # Definér matrix
$A := Matrix([[3, 1], [1, 2]])$

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

Egenværdier og egenvektorer

$E := Eigenvectors(A)$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} & \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dvs. egenværdier og tilhørende egenvektorer er:

$$\lambda_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 3.6180..\bullet$$

med tilhørende egenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.6180... \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.38196..$$

med tilhørende egenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.6180... \\ 1 \end{pmatrix}$

Når den lineære afbildning, ved matricen A, virker på enhedscirklen bliver den strakt ud til en ellipse.

Retningen cirklen bliver strukket, er langs egenvektorerne for afbildningen, som er retningen for halvakserne i ellipsen.
Længden af halvakserne er egenværdierne.

Den ellipse der fremkommer er roteret i forhold til x-aksen.

Vinklen den er roteret med får vi ved at finde vinklen θ mellem egenvektoren v_1 og x-aksen.

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{1}{1.6180...} \quad \Rightarrow$$

$$\arctan\left(1, \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}\right) = \frac{\arctan(2)}{2}$$

$$evalf\left(\frac{\arctan(2)}{2}\right) = 0.5535743590$$

$$\frac{0.5535743590 \cdot 180}{\pi} = 31.71747441 \approx 31.7\,°$$

dvs. **ellipsen bliver roteret 31.7 °** i forhold til x-aksen.

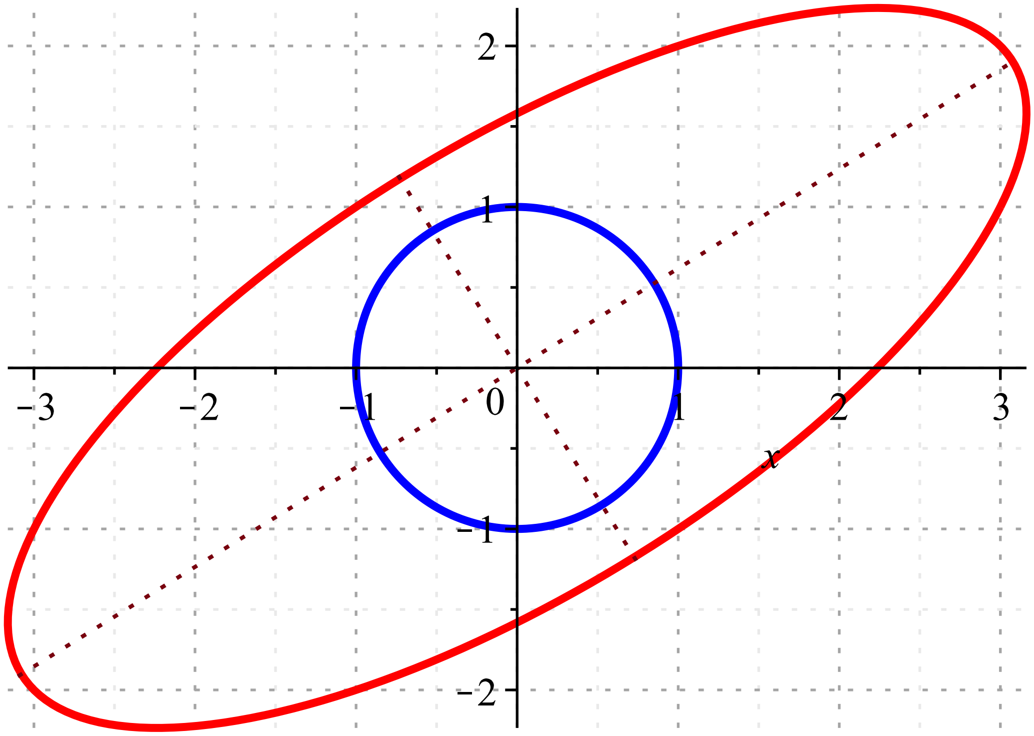
Nu vil vi plotte afbildningen - både cirklen og ellipsen

Vi vil bruge en parametrisering

\# ***Start med en enhedscirkel***:
$cirk(t) = (\cos(t), \sin(t))$

\# ***Anvend den lineære afbildning***:
$ellips(t) = A \cdot cirk(t)$

```
with(LinearAlgebra) :
with(plots) :

# Parametrisering af cirklen
cirk := t → Vector([cos(t), sin(t)]) :

# Afbildet kurve (ellipse)
cirk := t → A . cirk(t) :

# Storakse i ellipse
f := x → 0.618 x :

# Lilleakse i ellipse
g := x → -1.618 x :

#` `Plot cirkel og ellipse
p1 := plot([cos(t), sin(t), t=0 ..2 * Pi],
        scaling=constrained, color=blue, thickness=3) :

# Plot Stor- og Lilleakse
Stor := plot(f(x), x=-3.1 ..3.1, linestyle=dot, thickness=1) :
Lille := plot(g(x), x=-0.74 ..0.74, linestyle=dot, thickness=1) :

# Definér matrix
A := Matrix([[3, 1], [1, 2]]) :

#` `Parametrisering af cirklen
x := t → cos(t) :
y := t → sin(t) :

#` `Afbildede koordinater
X := t → A[1, 1]*x(t) + A[1, 2]*y(t) :
Y := t → A[2, 1]*x(t) + A[2, 2]*y(t) :

#` `Plot
p2 := plot([X(t), Y(t), t=0 ..2 * Pi],
    scaling=constrained,
     color=red, thickness=3, axis=[gridlines=[linestyle=dot]]) :

display(p1, p2, Stor, Lille);
```


2
1
−1
−2
−3
−2
−1
0
1
2
3
x